Zusammenfassung Stochastik- Grundkurs 2m3 (UER)

1. Ergebnisraum, Ereignis (Buch S. 13)

Ein Ergebnisraum Ω eines Würfelwurfes ist z.B. $\{1,2,3,4,5,6\}$, ein Ω eines Doppelwurfes z.B. $\{(1,1), (1,2),(1,3),..(2,1),(2,2),....\}$, also 36 Elemente. Bei einem Wurf mit 3 (verschiedenfarbigen) Würfeln gleichzeitig hätte Ω also schon 216 Elemente, man nennt diese „3-Tupel“ (z.B. (3,1,5)), weil es auf die Reihenfolge ankommt. Ein „Ereignis“ kann man z.B. „Augensumme 9“ nennen, es bestünde aus den Elementen $\{(6,2,1),(6,1,2),(2,6,1),(2,1,6),(1,2,6),(1,6,2),(5,2,2),(2,5,2),(2,2,5),.........\}$,also einer Teilmenge von Ω mit 25 Elementen (nachrechnen!). Näheres zur Ereignisalgebra findet man auf S. 23 u. 24. Übung: 17/4,7,8

2.Unabhängigkeit im Orchester (4. Ex)

Ein Orchester besteht aus 24 Frauen und 31 Männern. 14 Männer spielen ein Blasinstrument, und insgesamt 38 Streichinstrumente müssen gespielt werden. Weitere Instrumentarten soll es nicht geben. Bei solchen Aufgaben stellt man eine Vierfeldertafel für die Wahrscheinlichkeiten auf , S: „Streicher“ F: „Frau“. Mit elementarer Logik bestimmt man die jeweiligen Anzahlen; diese kann man dann in Wahrscheinlichkeiten umrechnen:

	F	$\overline{F}$	
S	21/55	17/55	38/55
$\overline{S}$	3/55	14/55	17/55
	24/55	31/55	1

Da verhältnismäßig mehr Frauen ein Streichinstrument spielen, sind die Ereignisse F und F nicht unabhängig. Mathematisch drückt man dies durch den Vergleich von 21/55 mit 38/55·24/55 aus: $P(S \cap F) \neq P(S) \cdot P(F)$. Im Prinzip funktionieren Tafeln mit mehr Eigenschaften (z.B.Aufg.132/26, 65/8) ganz analog.
Anmerkung: Wenn S und F (un)abhängig sind, dann sind es S und $\overline{F}$ auch.
Ü: 129/3,6, 130/11, 131/15,18; 38/9; 39/13; Abituraufgaben 98III/5b, 98IV 4, 99III 1 etc.

3. Bernoulli aufsummiert oder Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit, bei 20 maligem Werfen mit einem Würfel 5 Sechser zu erhalten, kürzt man mit
$B(20, 5, \frac{1}{6})$ ab (vgl. Blatt 1Nr.7). In der lila Tabelle findet man dies übrigens unter Binomialverteilung n=20, k=5 schon ausgerechnet als 12,941% (S. 18). Oft will man aber auch die Wahrscheinlichkeit wissen *höchstens* 5 Treffer zu erhalten, was schon ein erheblicher Rechenaufwand ist (die Werte für k von 0 bis 5 zusammenzählen). Auch dies gibt es schon fertig in der Tabelle: „Binomialverteilung kumulativ“, S.29ff. Für den genannten Fall wäre dies $F_{\frac{1}{6}}^{20}(5) =$ 89,816% (nachschauen üben!)

4. 1200 mal Würfeln - Relative Häufigkeit (Buch S.31-33)

Da man streng genommen die Wahrscheinlichkeit nie genau kennt, definiert man die *relative Häufigkeit h* als die Anzahl k der Treffer durch die Anzahl n der Würfe, also z.B. k/n = 0,1575 bei 189 Treffern von n=1200 Würfen. Wie wir ausprobiert haben, stabilisiert sich h gegen einen festen Wert, wenn n sehr groß wird. h weicht bei großen n kaum mehr von der Wahrscheinlichkeit p ab (Gesetz der großen Zahl). Absolut gesehen kann die Trefferzahl trotzdem sehr weit vom

Erwartungswert $\mu = p \cdot n$ (=200 hier) abweichen. (Die mittlere Abweichung ist sogar $\sqrt{n}$. Das müßt ihn aber nicht wissen ☺).

5. Laplace oder Gezinkt ?- Testen von Hypothesen

Von zwei äußerlich nicht unterscheidbaren Würfeln ist einer ein Laplace-Würfel (p=$\frac{1}{6}$), und einer gezinkt (p= $\frac{1}{4}$). Mit 100 Würfen sollen sie getestet werden. Der Erwartunswert für den Laplace-Wüfel wäre ca. 17, für den gezinkten 25. Man muss nun eine *Entscheidungsregel* festlegen, z.B. dass man bis einschl. 20 Treffer den Würfel noch als gut ansieht, und ab 21 als gezinkt („Hypothese gezinkt“). Es gibt nun 2 Arten von Fehlern: man kann einen gezinkten Würfel als Laplace-W. ansehen, oder umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit dafür kann man direkt in der Tabelle der kumulativen Binomialverteilung nachsehen: p(Fehler 1. Art) = $F_{\frac{1}{4}}^{100}$(20)= 14,883%, p(Fehler 2. Art) = 1-$F_{\frac{1}{6}}^{100}$ (20) = 1-0,78025 = 21,975%. Will man geringere Fehlerwahrscheinlichkeiten für einen Fall, kann man die Entscheidungsregel ändern. Dann wird allerdings der andere Fehler wahrscheinlicher. Will man beide Fehler gering machen, benötigt man großes n (Stichprobenlänge). Ü: Bsp 11.2 (S.162), 177/8,9, 13; Abitur 98III 6, 98 IV 5, 99 III 5, 99 IV 3.