

Zusammenfassung Kombinatorik- Grundkurs 2m3 (UER)

1. Permutationen

3 Personen können sich auf 6 verschiedene Weisen in einer Schlange aufstellen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Kommt eine 4. dazu, kann diese sich in jede der 6 Schlangen auf 4 Plätze dazustellen \Rightarrow 24 Möglichkeiten, sich aufzustellen. Allgemein haben n Personen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = n!$ (n Fakultät) Möglichkeiten, sich aufzustellen.

Weitere Beispiele: Möglichkeiten, dass 8 Personen sich an einen Tisch mit 8 Plätzen setzen: $8!$

5 Karten eines Blatte beim Kartenspiel in der Hand anzuordnen: $5!$ usw.

2. Lotto 6 aus 49

Für die 1. Kugel gibt es 49 möglichkeiten, für die 2. nur noch 48. Insgesamt also $49 \cdot 48$ Möglichkeiten, 2 Kugeln hintereinander zu ziehen, z.B. 1-2, 1-3, 1-4 1-49, 2-1, 2-3, 2-4, 2-5 2-49, 3-1 usw. Klarmachen!

Mit Reihenfolge gibt es daher $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 49!/43!$ (kürzen!) Möglichkeiten. Da aber die Reihenfolge der Zahlen im Lotto nicht interessiert $(17, 24, 35, 11, 4, 41) = (24, 11, 4, 35, 41, 17)$ hat man so jedes mögliche Ergebnis $6!$ Mal gezählt (s. o., 6 Zahlen auschen die Plätze!) anstatt nur einmal. Das Ergebnis muss demnach durch $6!$ geteilt werden und es gilt:

„6 aus 49“ : $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13983816$ Möglichkeiten, also ziemlich viel... Ebenso: „2 aus 5“, „8 aus 32“ usw.

Allgemein (wem das gefällt): „k aus n“ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Übung: Aufgaben selbst ausdenken (wie 17 Schüler setzen sich auf 32 Stühle etc.)

3. Etwas schwerer: der 4er im Lotto

Wenn man 6 aus 49 gut verstanden hat 8 (nicht vorher!) kann auch berechnen, wie wahrscheinlich es ist, kleinere Gewinne einzufahren. Dazu muss man sich klarmachen dass beim 6er (s.o.) nur *eine* Mölichkeit unter den vielen abgezählten „günstig“ ist, und die Wahrscheinlichkeit $p(6er)$, einen Hauptgewinn zu landen, nur

$p(6er \text{ im Lotto}) = \frac{1}{13983816} = 0,00000715 \%$ - vorausgesetzt ist dabei – dass alle obigen Möglichkeiten *gleich wahrscheinlich* sind (das ist oft der Fall, aber man muss aufpassen!)

Die Möglichkeiten, einen 4er zu bekommen, sind $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13545$, weil ich mir 4 aus 6 von den richtigen

Zahlen wählen muss *und* 2 aus den 43 falschen Zahlen. (Beispiel von oben: **17, 4, 11, 41**, 13, 7). Es gilt also:

$p(4er) = \frac{\text{günstige _ Ereignisse}}{\text{mögliche _ Ereignisse}} = \frac{13545}{13983816} = 0,097 \%$, immer noch wenig....

4. Das gleiche in Grün: Schafkopf, Poker etc.

KKK 9 9 ist z.B. ein sog. Full House. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür ?

13 Möglichkeiten, den Typ (z.B. König) des Drillings auszuwählen, 3 aus den 4 Königen, 12 Möglichkeiten, den Typ des Pairs auszuwählen (einer ist schon verbraucht), schließlich 2 aus 4 von den 9ern auszuwählen, also

$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} = 3744$ „günstige“ Ereignisse.

Mögliche Blätter auf der Hand sind dagegen 5 aus 52 = 2598960, so dass gilt:

$p(\text{FullHouse}) = \frac{3744}{2598960} = 1,44 \%$ (bei 52 Karten !)

Übung: Berechne $p(\text{Flash} = \text{alle 5 Karten von einer Farbe})$, Günstig: 5148.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten von Flash und FullHouse in einem 32-Karten-Satz!

Weitere Übung: 4 of a kind (leicht), Two pairs (schwierig), Strasse (z.B. 8 9 10 J Q), 6 Laufende im Schafkopf.

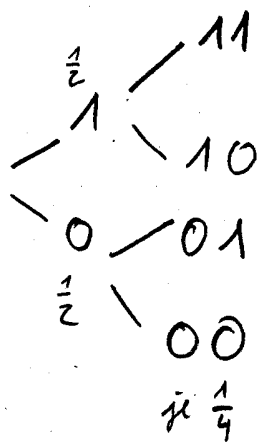
5. Würfel: Augensumme bei 3 Würfeln (vgl. Bild S.12 im Buch – für 2 Würfe)

Für die Augensumme 11 gibt es folgende „Möglichkeiten“: 1-4-6, 1-5-5, 2-3-6, 2-4-5, 3-4-4, 3-3-5, für Augensumme 12 dagegen 1-5-6, 2-5-5, 2-4-6, 3-3-6, 3-4-5, 4-4-4. Dies *scheint* also gleich wahrscheinlich zu sein! Bei näherem Hinsehen kann allerdings 4-4-4 nur entstehen, wenn alle drei Würfel 4 zeigen, für 3-3-6 gibt es dagegen (3,3,6), (3,6,3) und (6,3,3), wenn es auf die Farbe der Würfel bzw. auf die *Reihenfolge* ankommt (bei 3-4-5 sogar $3! = 6$ Möglichkeiten, die Reihenfolge zu vertauschen, s.1.!)
Ereignisse, bei denen die Reihenfolge wichtig ist, nennt man *Tupel* $(3,3,6) \neq (3,6,3)$, im Gegensatz zu *Mengen* (wie beim Lotto).

Insgesamt gibt es also 6^3 Tupel an möglichen Ereignissen, von denen 24 „günstige“ die Augensumme 11 haben (nachrechnen!), $p(\text{Summe } 11) = 11,1\%$. Berechne $p(\text{Summe } 12)$

Übung: Wahrscheinlichkeiten aller Augensummen 2-12 für zwei Würfe, auftragen im Diagramm!

6. Werfen einer Münze



Wie wahrscheinlich ist es, bei 10maligem Werfen 5 Mal Zahl zu erhalten?

Zunächst gibt es 2^{10} mögliche Ereignisse, eines davon ist z.B. 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0. Wieviele davon sind „günstig“, d.h. mit 5 „Treffern“? Einfach: 5 aus 10 Plätze für

die 1er auswählen = $\binom{10}{5} = 252$. $p(5 \text{ Treffer von } 10) = 24,6\%$

Das gleiche Ergebnis erhält man mit folgender Überlegung („Baum“). Man zeichnet sich die Möglichen Ereignisse mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf:

jede bestimmte Reihe (wie z.B. oben) hat Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^{10}$, weil „1“ und „0“ gleich wahrscheinlich ist.

Da alle diese Reihen gleich wahrscheinlich sind, braucht man das Ergebnis nur mal $\binom{10}{5}$ nehmen.

7. MenschÄrgere DichNicht - so ähnlich, nur mit $p \neq \frac{1}{2}$ (Bernoulli-Kette)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 15 Würfeln genau vier 6er zu bekommen? - Wir unterscheiden nur zwischen „Treffer“ T (6er) mit $p = \frac{1}{6}$ und „Niete“ (kein 6er) $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Ein „günstiges“ Ereignis wäre z.B. N T N N N N T N N T N N N N T, die Wahrscheinlichkeit dafür $(\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{11}$, da es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

Da alle Ereignisse mit 4 Treffern und 11 Nieten gleich wahrscheinlich sind, muss man sich nur wieder 4 von 15 Plätzen für die Treffer suchen:

$p(\text{genau 4 Treffer bei 15 Würfeln}) = \binom{1}{6}^4 \binom{5}{6}^{11} \cdot \binom{15}{4} = 14,1754\%$. Das kürzt man übrigens ab als $B(15, 4, \frac{1}{6})$

Übung: $B(60, 10, \frac{1}{6})$, $B(30, 5, \frac{1}{6})$, $B(30, 10, \frac{1}{3})$.

Anstatt mit dem Baum erhält man das gleiche Resultat, wenn man sich alle Tupel (mit Reihenfolge!) überlegt und mit $p = \frac{\text{günstige _ Ereignisse}}{\text{mögliche _ Ereignisse}}$ arbeitet.

KingMichael of Great Britain, derzeit noch wohnhaft in Australien, ist ebenfalls mit einer Bernoulli-Kette lösbar. Möglichkeiten