

25 Mini-Lektionen zum Werk Albert Einsteins

Dr. Alexander Unzicker
Pestalozzi-Gymnasium München

Themen

Warum die Zeit auf dem Mount Everest schneller vergeht, und was das mit Geometrie zu tun hat (021024).....	2
Zweimal Relativitätstheorie in jedem Steinwurf (021114).....	2
Der Mathetrick, den Max Planck kannte, als die Quantenmechanik geboren wurde (021114).....	2
Spezielle Relativitätstheorie – kurz hergeleitet (021114)	3
Einsteins Versuche, die Gravitation mit dem Elektromagnetismus zu vereinen (030213, 040429).....	3
Rotationsspektren von Galaxien, Dunkle Materie (030213).....	3
Das Echo des Urknalls- die kosmische Hintergrundstrahlung (030213,031218).....	4
Wo sind wir ? Entdeckung Galaxien - Hubbleexpansion (031016,041021).....	4
Was mit der Hubble-Expansion nicht stimmt, Dunkle Energie, und Einsteins 'Eselei' (031016).....	4
Die Bestätigung von spezieller (SR) und allgemeiner Relativitätstheorie (AR) in zwei Flugzeugen (031218).....	5
Kreiselexperiment nach 40 Jahren endlich im Weltraum- Gravity Probe B (031118).....	5
Der Photoeffekt -'sehr revolutionär' (040527).....	5
Phantastische Waage in den Weiten der Milchstraße: Taylor-Hulse- Pulsar (040708).....	5
Einstein war baff – das Äquivalenzprinzip (040708).....	6
Wo die Zeit überhaupt nicht mehr vergeht - Schwarze Löcher und weitere Merkwürdigkeiten (041118).....	6
Einsteins Herzklopfen 1915- die Perihelverschiebung des Merkur (041118).....	6
Intergalaktisches Thermometer : Die fehlende Masse in Galaxienhaufen (041209).....	7
Heller als tausend Sonnen- Nuklearenergie, leider nicht immer friedlich (050120).....	7
Wenn die Entfernungen nicht mehr stimmen - Was ist eine Metrik ? (050303).....	7
Kugelgeometrie - Kopfschmerzen für Euklid (050303).....	7
Lichtablenkung: wofür Einstein 1919 gefeiert wurde (050303).....	8
Grüße von Mars und Venus: Die Radarechoverzögerung, von der Einstein noch nichts wusste (050303).....	8
Schwarzschildmetrik- das schwarze Loch in der Raumzeit (050303).....	8
Drehen eines Vektors beim Spaziergang - Was ist eine Konnexion ? (050303).....	9
Riemannscher Krümmungstensor- physikalisch wiederentdeckt von Einstein (050303).....	9

Warum die Zeit auf dem Mount Everest schneller vergeht, und was das mit Geometrie zu tun hat (021024)

Die Allgemeine Relativitätstheorie (Einstein, 1915) sagt u.a. aus, dass die Zeit in Gravitationsfeldern langsamer vergeht. Da das Gravitationsfeld der Erde auf dem Mount Everest etwas schwächer ist, vergeht die Zeit dort schneller, und eine Atomuhr, die sich dort einige Zeit befand, wird nach der Rückkehr auf Meereshöhe *vorgehen*. Betrachtet man die Zeit als gleichwertige Koordinate, so könnte man auch sagen, dass sich in der Raum-zeit-ebene kein Rechteck mehr zeichnen läßt (Ecken stimmen nicht mehr überein). Dies kann man als Krümmung der 4-dimensionalen Raumzeit auffassen.

Der Faktor, um den die Zeit langsamer vergeht, ist übrigens $\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$ (Masse M, Abstand r davon, $c = 3 \cdot 10^8$

m/s Lichtgeschw, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg}$ Gravitationskonstante)

Feynman: Vorlesungen über Physik, Band 2 (Oldenbourg), Kap. 42-7.

Das Zwillingparadoxon und die mögliche Reise in die Zukunft (021114)

Bewegte Uhren gehen nach der speziellen Relativitätstheorie (Einstein 1905) um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer.

Daher könnte theoretisch ein Zwilling nach einer Reise, die für ihn 10 Jahre dauert, nach der Rückkehr seinen Bruder um 20 Jahre gealtert vorfinden. Für ihn wäre dies praktisch eine Reise in die Zukunft, allerdings ohne Möglichkeit der Rückkehr. (Der Zeitfaktor ist also 0,5. Wie groß muss v sein?)

Standardlehrbücher der Physik, z.B. Gerthsen/Vogel Physik (Springer) 19. Aufl., Kap. 15.2.

Zweimal Relativitätstheorie in jedem Steinwurf (021114)

Angenommen, man wirft einen Stein nach oben, der nach 10 s wieder zurückkommen soll. Wie schafft es der Stein, dass für ihn möglichst viel Zeit vergeht? Nach der AR (siehe 24.10.) kann er die Zeit für sich etwas

schneller vergehen lassen (mit der Formel $\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$), wenn er sich aus dem Gravitationsfeld der Erde nach

oben begibt. Das darf er aber nicht zu schnell tun, da sonst nach der SR seine Zeit wieder langsamer vergehen würde. Was ist der beste Fahrplan, den der Stein wählen kann? - genau die Flugbahn nach den Bewegungsgleichungen!

Wunderbar erklärt in: Feynman Lectures, Bd. II, Kap. 42-9

Der Mathetrick, den Max Planck kannte, als die Quantenmechanik geboren wurde (021114)

Wie fast alle Funktionen, läßt sich die Exponentialfunktion als unendliche Reihe schreiben:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{120} x^5 + \dots$$

Um 1900 war die sog. *Schwarzkörperstrahlung* bereits gut bekannt und experimentell genau erforscht. Sie besagt, dass jeder Körper Licht aussendet, dessen Intensität bei der entsprechenden Wellenlänge nur von der Temperatur abhängt. Dieses *kontinuierliche* Spektrum wird durch die Wärmebewegung der Atome verursacht und hat nichts mit dem einfarbigen Licht zu tun das für jedes Atom charakteristisch ist und durch Elektronensprünge zwischen den Schalen entsteht. Der bekannteste 'schwarze Strahler' ist die Sonne, deren Oberflächentemperatur von ca. 6000 K genau der spektralen Verteilung des Sonnenlichts entspricht. Die Intensität als Funktion der Lichtfrequenz hat etwa die im Bild gezeigte Form. Wien (Nobelpreis 1911) und Rayleigh (NP 1904) hatten durch Vergleich der

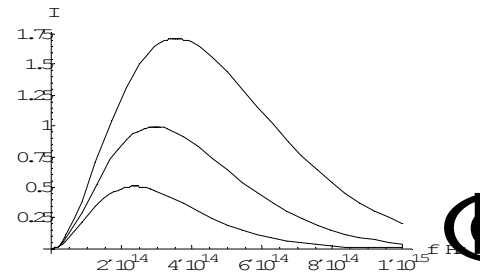
Kurven schon die Näherungsformeln $I(f,T) = a f^3 e^{-\frac{hf}{T}}$ bzw. $I(f,T) = 8 \pi k T f^3 b / c^3$ herausgefunden, die die

Form der Kurven für große und kleine Frequenzen f ganz gut annähern. Planck erinnerte sich nun, dass e^x ungefähr gleich $1+x$ ist, und setzte für x den Bruch hf/kT ein. Dann lassen sich beide Formeln zusammenfassen

und das Strahlungsgesetz lautet $I(f,T) = 8 \pi h f^3 / c^3 \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$. Die genaueste Messung einer

Schwarzkörperstrahlung ist die der *kosmischen Hintergrundstrahlung*. Die neu auftretende Konstante h nannte er Wirkungsquantum. Planck war sich bewußt, dass er im Grunde den mathematischen Trick der Taylorreihe angewendet hatte, und entschuldigte sich fast für die seiner Ansicht nach formale Herleitung.

Seine neue Formel suggeriert nämlich, dass ein Licht nur in 'Portionen' der Energie hf auftritt. Diese revolutionäre Bedeutung wurde aber erst von Einstein erkannt (dafür erhielt er den NP 1921), aber Planck selbst glaubte lange nicht daran.
(rechts Spektrum für 6000 K, 5000 K, 4000 K)

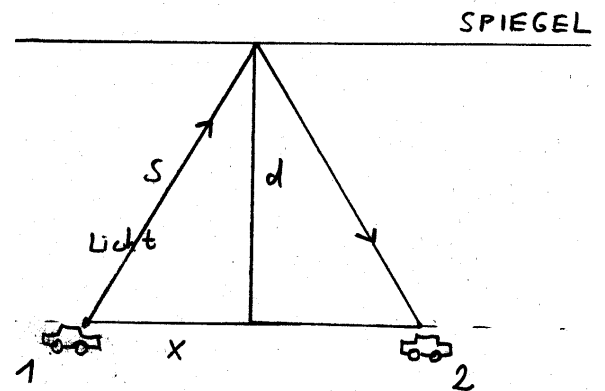


Spezielle Relativitätstheorie – kurz hergeleitet (021114)

Zeitdilatation, Längenkontraktion werden durch den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ beschrieben, der Massenzuwachs durch γm_0 . Diese Formel läßt sich mit folgendem Grundgedanken relativ schnell herleiten:

1. Bewegt man sich mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung, kann man mit keinem physikalischen Experiment diese Bewegung nachweisen. Alle Experimente verlaufen wie in einem ruhenden System.
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Systemen konstant gleich c , weil man andernfalls ja die gleichförmige Bewegung des Systems durch eine Messung von c feststellen könnte.

Nun rechnet man mit in folgendem Gedankenexperiment: ein Auto fährt im Abstand d parallel zu einem Spiegel mit der Geschwindigkeit v . Im Punkt 1 sendet es einen Lichtblitz aus, der reflektiert wird und im Punkt 2 wieder am Auto ankommt. Im System des ruhenden Straßenrandes ist die Zeit $t_R = 2s/c$ vergangen, im System des bewegten Autos hingegen nur die Zeit $t_B = 2d/c$. Offensichtlich muss in dem bewegten System die Zeit langsamer vergangen sein! Den Faktor $\gamma = t_B/t_R = d/s$ erhält man aus $x = vt$ und Pythagoras, denn $d^2 = s^2 - v^2t^2$, usw. (nachrechnen!).



Standardlehrbücher der Physik, z.B. Gerthsen/Vogel Physik (Springer) 19. Aufl., Kap. 15.

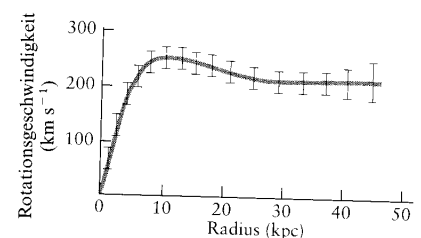
Einsteins Versuche, die Gravitation mit dem Elektromagnetismus zu vereinen (030213, 040429)

Das geniale an Einsteins allgemeine Relativitätstheorie war, dass sie die Gravitation als Raumkrümmung beschreiben konnte. Sein unerfüllter Lebenswunsch blieb es, auch die elektromagnetischen Phänomene mit in einer geometrischen Theorie zu vereinen. Als geometrische Eigenschaft des Raumes betrachtete er deshalb –einer Anregung des französischen Mathematikers Cartan folgend– neben der Krümmung die sog. Torsion und versuchte diese mit dem Elektromagnetismus in Verbindung zu bringen. Interessant ist, dass diese Torsion auch zur Beschreibung von topologischen Defekten des Raumes verwendet wird (s.o.), obwohl Einstein 1928 gar nicht wissen konnte, dass diese topologischen Defekte sich ähnlich wie Elektronen verhalten. Umgekehrt wusste man bei Entdeckung der relativistischen Formel der Versetzungsbewegung (1948) nicht, dass Versetzungen mit Torsion zu tun haben (1955 entdeckt).

www.alexander-unzicker.de/ae1930.html

Rotationspektren von Galaxien, Dunkle Materie (030213)

Setzt man die Gravitationskraft gleich der Zentripetalkraft, so erhält man in einem Zentralkraftsystem (Sonne-Erde, Erde-Mond, Galaxie-umlaufende Wolken) einen Zusammenhang zwischen Umlaufgeschwindigkeit und Abstand r vom Zentrum. Es gilt: $F_Z = F_G$, also $m v^2/r = GMm/r^2$, wobei M die Masse des Zentralkörpers und m die des umlaufenden ist. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ist die Gravitationskonstante. $1 \text{ kpc} = 3260 \text{ Lichtjahre}$.



Nach kürzen von m und r müsste demnach die Geschwindigkeit von Wasserstoffwolken, die um eine Galaxie laufen, mit $r^{-1/2}$ abnehmen. Man beobachtet dagegen ein von r unabhängiges v . Als Erklärung bemüht man sog.

dunkle Materie, für die es auch andere Hinweise gibt. Insgesamt ist dieses Phänomen aber sehr wenig verstanden und bietet vielleicht manche Überraschung in den kommenden Jahren. v misst man mit dem spektroskopischen ‚Fingerabdruck‘ der H-Atome, der durch v dopplerverschoben ist.

Oldenbourg Physik 11, S. 97ff. Joseph Silk, Die Geschichte des Kosmos, Spektrum Verlag, S.138

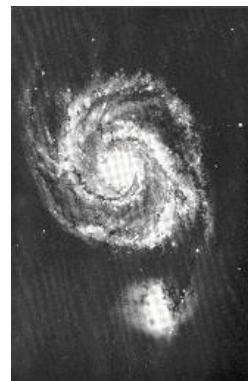
Das Echo des Urknalls- die kosmische Hintergrundstrahlung (030213,031218)

1964 entdeckten die Radioastronomen Penzias und Wilson (NP 1978) eine Mikrowellenstrahlung am schwarzen Nachthimmel, für die es keine offensichtliche Erklärung gab. R.Dicke und andere interpretierten dies richtig als Überbleibsel jener heißen Strahlung, von der das Universum ‚kurz‘ nach dem Urknall (300000 Jahre) wie ein riesiger Feuerball erfüllt war. Durch die Expansion hat es sich in den letzten 13 Mrd. Jahren wie ein heißes Gas auf die Strahlungstemperatur 2,726 K abgekühlt. Der kosmische Mikrowellenhintergrund ist präzisiertes sog. Planck-Spektrum (s.o.) eines schwarzen Körpers, das je gemessen wurde (Mit dem Satelliten COBE und seinem Nachfolger WMAP, 2003!). Die Hintergrundstrahlung ist ein überzeugender Beleg für die Expansion des Universums, die schon E. Hubble entdeckt hatte.

Joseph Silk, Die Geschichte des Kosmos, Kap.3; Steven Weinberg, Die ersten drei Minuten,

Wo sind wir ? Entdeckung Galaxien - Hubbleexpansion (031016,041021)

Unsere Galaxie (Milchstraße genannt, im Bild eine ähnliche Galaxie!) enthält ca. 10^{11} Sonnen; wir befinden uns relativ weit außen (ca. 80% des Radius). Von der Seite gesehen sind solche Spiralgalaxien flache Scheiben. Die uns nächstgelegene kann man gut mit einem Fernglas sehen (Andromeda, momentan am Nachthimmel unweit des Pegasus-Vierecks). Sie wurde 1929 von E. Hubble als solche erkannt. Mit seinem neuen Teleskop entdeckte Hubble bald eine weitere interessante Tatsache: fast alle Galaxien scheinen sich von uns wegzubewegen, und zwar umso schneller, je weiter sie von uns entfernt sind. Natürlich kommt unserer Galaxie keine besondere Rolle zu sondern andere Galaxien würden dies ebenso beobachten. Dies ist Zeichen einer gleichmäßigen Expansion des Weltalls (Hubble-Expansion). Nimmt man an, dass alle Galaxien ihre Geschwindigkeit beibehalten haben (das ist nicht sicher!),



kann man die Bewegung zurückrechnen und erhält einen Zeitpunkt vor 13,7 Milliarden Jahren, bei dem das ganze heute sichtbare All auf einem Punkt zusammengedrückt war (Urknall). Über die näheren Umstände gibt es aber wenig gesichertes Wissen. Die Entfernung der Galaxien wird über Helligkeiten gemessen (je näher, desto heller erscheint eine Lichtquelle), die Geschwindigkeit mit der sog. Doppler-verschiebung, die man jeden Tag im Straßenverkehr selber beobachten kann wenn ein hinreichend schnelles Auto, das Schall erzeugt, vorbeifährt: das Geräusch ist erst höher und im Moment des Vorbeifahrens wird es schlagartig tiefer, man könnte sogar nur anhand des Intervalls die Geschwindigkeit abschätzen. Licht verhält sich analog: Ist es rotverschoben, so ist die Frequenz niedriger, das emittierende Objekt entfernt sich also vom Beobachter. Ist es blauverschoben, so umgekehrt. Die Frequenzen kennt man, weil Wassertstoffatome ganz bestimmtes Licht aussenden. Einstein hätte übrigens aus seinen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie die Expansion des Universums herleiten können, da diese ein statisches Universum gar nicht als Lösung zulassen. Statt die Expansion vorherzusagen, führte er in die Gleichungen einen Term ein (kosmologische Konstante), was ihn später sehr ärgerte.

Was mit der Hubble-Expansion nicht stimmt, Dunkle Energie, und Einsteins 'Eselei' (031016)

Ein Stein den man in die Höhe wirft, verliert kinetische und gewinnt gleichzeitig potenzielle Energie. Man kann leicht berechnen, welche Geschwindigkeit nötig ist, um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen ($G M m / r = m v^2 / 2$ usw.). Ist er schneller, überwiegt die kinetische, andernfalls die potenzielle Energie. Ebenso kann man bei der Expansion des gesamten Weltalls die Frage aufwerfen, welche Energieart überwiegt, demzufolge es ewig weiterexpandiert (E_{kin} überwiegt, sog. offenes Universum) oder wieder in sich zusammenstürzt (geschlossenes U.), oder gerade zwischen diesen Möglichkeiten liegt (dafür gibt es momentan Hinweise, sog. Einstein-de Sitter-Universum). Niemand zweifelte aber ernsthaft daran, daß das die Expansion durch das Ankämpfen gegen die Schwerkraft gebremst wird. Gerade das Gegenteil scheint aber der Fall zu sein: Entfernte Supernovaexplosionen scheinen viel weiter entfernt zu sein als die Berechnungen zur Expansion erlauben. Man geht daher seit 1998 davon aus, daß die Expansion des Weltalls beschleunigt ist. Eine Erklärung wird momentan mit der sog. dunklen Energie versucht, die abstoßende Eigenschaften haben soll.

Lustigerweise ist dies verwandt mit einem Term, den Einstein 1917 zu seinen Gleichungen hinzufügte, weil er fest an ein statisches Universum glaubte. Als sich die Expansion durch die Messungen von Hubble herausstellte, bezeichnete er dies als 'seine größte Eselei'. Neuerdings wird dieser Gedanke wieder aufgegriffen, man ist allerdings von einem guten theoretischen Verständnis noch sehr entfernt.

Sexl/Urbantke: Gravitation und Kosmologie, neuere Artikel zu 'Dunkle Energie'

Die Bestätigung von spezieller (SR) und allgemeiner Relativitätstheorie (AR) in zwei Flugzeugen (031218)

Obwohl schon früher der veränderte Zeitablauf in der Relativitätstheorie zwar sehr gut belegt war, gelang Hafele und Keating 1972 ein spektakuläres Experiment: sie nahmen jeweils eine supergenaue Atomuhr unter den Arm und setzten sich in zwei Flugzeuge, die die Erde in östlicher bzw. westlicher Richtung umkreisten (leicht ander Flugroute). Das Ergebnis (in ns) war eine

(SR) und $1 - \frac{GM}{rc^2}$ (AR).

hervorragende Bestätigung der Zeitfaktoren $\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Effekt	Ostflug	Westflug
Gravitation (AR)	144 14	179 18
Geschwindigkeit (SR)	-184 18	96 10
Summe Theorie	-40 23	275 21
Summe Experiment	-59 10	273 7

Literatur: Sexl/Urbantke Gravitation und Kosmologie, S. 107, Internet

Kreiselxperiment nach 40 Jahren endlich im Weltraum- Gravity Probe B (031118)

Die Physiker Thirring und Lense sagten 1918 aus den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie einen Effekt vorher, der in seiner Art völlig anders ist als andere Tests der Theorie: ein Kreisel sollte in der Nähe eines rotierenden Körpers seine Rotationsachse leicht ändern. Bei der Erde (als Kreisel in der Nähe der rotierenden Sonne) ist dieser Effekt hoffnungslos klein, um ihn je messen zu können. 1961 begannen die amerikanischen Physiker Schiff, Cannon und Fairbank von einer Realisierung des Experiments in einem Satelliten in einer Erdumlaufbahn zu träumen. Nach Jahrzehntelangen Rechnungen, Bauzeiten und unendlichen technischen Schwierigkeiten scheint es nun soweit zu sein: auf Magnetfeldern (supraleitende Spulen, durch flüssiges Helium gekühlt) gelagerte Kreisel sollen pro Jahr ihre Rotationsachse um einen Winkel von 0,05 Bogensekunden (!!) ändern. Der Start war zunächst für den 14.11.2003 vorgesehen und wird wohl demnächst stattfinden. Einstein hätte wohl von diesem Experiment nicht zu träumen gewagt.

Literatur: Webseiten der NASA, Stichwort: Gravity Probe B; C.Will: ..und Einstein hatte doch Recht, S. 227ff. -aktuell: geplanter Starttermin 6.12.03 nun doch verschoben, Start am 20.04.03 erfolgt

Der Photoeffekt -'sehr revolutionär' (040527)

Elektronen können durch Lichteinstrahlung aus Metallgittern herausgeholt werden, man stellt dies durch einen kleinen Strom fest. Das wäre an sich noch nicht erstaunlich, da Licht als Welle Energie übertragen kann. Merkwürdigerweise setzt aber der Photostrom erst ab einer bestimmten Lichtfrequenz ein, *unabhängig* von der Intensität. Einstein hatte als erster bei der Planckschen Strahlungsformel vermutet– damals eine revolutionäre These – dass Licht Energie nur in Portionen von hf (h Plancksches Wirkungsquantum) abgeben kann, den sog. Lichtquanten (Photonen).

Für den Beleg seiner These durch den Photoeffekt erhielt er 1921 den Nobelpreis. Ein weiterer Beleg für die Teilchennatur von Licht ist der Comptoneffekt.

Literatur: Oldenbourg Physik 12, Kap. 23 ff.

Phantastische Waage in den Weiten der Milchstraße: Taylor-Hulse- Pulsar (040708)

Der Entdeckung des THP (auch Binärpulsar, PR1913+16) ging natürlich die Entdeckung der Pulsare überhaupt voraus (NP 1974). Diese wurden zuerst als „LGM“ (little green men) bezeichnet, weil man sich die regelmäßigen Radiosignale im Millisekundenbereich nicht erklären konnte. Erst die Vorstellung von einem Leuchtturmblinken, das ein schnell rotierender Stern in Richtung der Achse seinen Magnetfeldes aussendet, lieferte eine Erklärung. Allerdings muss ein Stern von Sonnenmasse dann extrem klein – Radius 5-10 km - sein. Dies stimmt wunderbar mit der Theorie der Neutronensterne überein, die die Dichte von Kernmaterie haben (um den Faktor 10^{15} größer als „normale“, rechnen!).

Aus der Variabilität eines solchen Signals folgerte Taylor, dass sich zwei Sterne, davon ein Neutronenstern, umeinander bewegen, nach Kepler auf Ellipsenbahnen. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART)

verschieben sich diese Ellipsen um eine Winzigkeit (Periheldrehung), die beim Planeten Merkur zu 43 Bogensekunden/Jhd. gemessen wurde. Beim Pulsar PR1913+16 war dieser Effekt 10 Millionen mal größer: ca. $4,2^\circ$ pro Umlauf! So konnte man indirekt auch die Massen der beiden Sterne bestimmen, was auf den sehr plausiblen Wert 1,4 Sonnenmassen führte. Der Binärpulsar gilt daher auch als spektakuläre Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins.

Literatur: C.Will: *Was Einstein Right ? Suche nach: binary pulsar*

Einstein war baff – das Äquivalenzprinzip (040708)

Masse können wir allein dadurch definieren, wie sehr sich ein Körper einer beschleunigenden Kraft widersetzt (Trägheit): $m = F/a$. Es gibt viele Kräfte in der Physik, und die meisten hängen von weiteren Eigenschaften der Materie ab: die elektrische Kraft von der Ladung, die Kernkraft von der Anzahl der Kernbausteine, etc. Die Gravitation spielt eine Sonderrolle: sie hängt – zufällig ? – von der uns schon bekannten Masse (schwere Masse) ab. Oder doch nicht? Vielleicht unterscheiden sich die träge und schwere Masse ja um eine Winzigkeit? Die Physiker geben sich unendlich viel Mühe, dies zu testen (Eötvös 1908, und andere heute), aber bisher hat noch niemand eine Abweichung gefunden: träge und schwere Masse scheinen *exakt gleich* zu sein! Dies nennt man Äquivalenzprinzip. Einstein schreibt dazu: „.. dieser Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse leuchtete mit nun in seiner tiefen Bedeutung ein. Ich wunderte mich im höchsten Maße über sein Bestehen...“ Einstein baute auf dem Äquivalenzprinzip die ART auf, was zu einer spektakulären geometrischen Beschreibung der Gravitation führte.

Literatur: *Einstein: Mein Weltbild; Relativitätstheorie*

Wo die Zeit überhaupt nicht mehr vergeht - Schwarze Löcher und weitere Merkwürdigkeiten (041118)

Die Formel $\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$ wirft die Frage auf was passiert, wenn man sich einer Masse auf den Radius

$2 GM/c^2$ (man nennt das Schwarzschildradius) nähert - dann vergeht die Zeit überhaupt nicht mehr! Außerdem kann von diesem Radius auch kein Licht mehr entweichen, weil ein Photon mehr Energie bräuchte um gegen die Gravitation anzukämpfen, als es überhaupt bei sich hat ($E = h f$, f Frequenz, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Nms). Ist eine Masse so konzentriert, nennt man sie daher *Schwarzes Loch* (Black Hole).

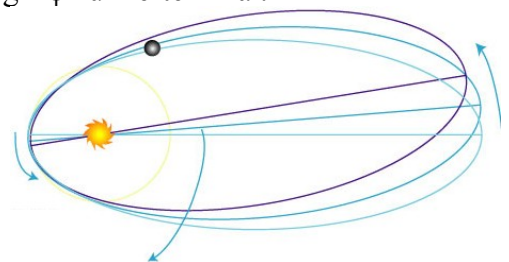
Einem aufmerksamen Beobachter fällt auf, dass in der obigen Formel der Beitrag der Sonne ($M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m), größer ist als der Beitrag der Erde ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $r = 6370$ km). Witzigerweise ist der Beitrag der gesamten Milchstraße ($M = 2 \cdot 10^{41}$ kg, $r = 3 \cdot 10^{20}$ m) noch größer, und - verstehe es wer will - der Beitrag des gesamten Weltalls ist so groß, dass die Zeit gar nicht mehr vergeht, d.h. das Universum als ganzes scheint ein schwarzes Loch zu sein! Die Astrophysiker bezeichnen dieses Problem anders, sie sagen das All erscheint *flach* (Einstein-de Stitter-Universum), d.h. gerade in der Mitte zwischen einem ewig expandierenden (offenen) und einem irgendwann wieder kontrahierenden (geschlossenen) Universum. Vielleicht verstehen wir aber auch etwas ganz Grundsätzliches noch nicht.

Einsteins Herzklopfen 1915- die Perihelverschiebung des Merkur (041118)

Planeten bewegen sich nach dem keplerschen Gesetz bekanntlich auf Ellipsenbahnen. Schon vor langer Zeit hatten die Astronomen aber festgestellt, dass sich die Ellipse des Planeten Merkur um einen winzigen Betrag (43 Bogensekunden pro Jahrhundert, d.h. pro 415 Merkurumläufe) mehr verschob als sich durch den Einfluss der anderen Planeten erklären ließ. Einstein berechnete diese Verschiebung $\Delta\varphi$ zum ersten Mal.

Es gilt: $\Delta\varphi = \frac{6GM\pi}{A(1 - \varepsilon^2)c^2}$, wobei wieder der Schwarzschildradius

r_s auftaucht! (Große Halbachse $A = 5,791 \cdot 10^{10}$ m, Exzentrizität ε der Ellipse 0.2056, Sonnenmasse $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, bitte nachrechnen!) Einstein konnte vor Aufregung nicht mehr schlafen, als er dieses Ergebnis zum ersten Mal greifbar sah.



Sexl/Urbantke: *Gravitation und K.*; *Einstein: Mein Weltbild*; *Einstein: Relativitätstheorie*

Intergalaktisches Thermometer : Die fehlende Masse in Galaxienhaufen (041209)

Temperatur bedeutet Teilchenbewegung, bewegte Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab- je heißer die Teilchen, desto kürzer die Wellenlänge. Man stellt auf diese Weise fest, dass Gaswolken in Galaxienhaufen verdammt heiß sein müssen. Aus der Lichtstärke der Galaxien läßt sich dagegen ungefähr deren Masse abschätzen. Nachdem man ein bißchen rechnete, wunderen sich die Leute darüber warum so heißes Gas nicht schon von relativ leichten Galaxien verschwunden ist- die thermische Bewegung könnte die Gravitation leicht überwinden. Entweder wir sehen also eine zufällige Momentaufnahme - was extrem unwahrscheinlich ist, oder es ist eben doch mehr Masse da, als man direkt beobachtet. Dieses Problem der fehlenden Masse (Zwicky, 1933), wird heute dunkle Materie (dark matter) genannt, die sich nur indirekt über ihre Gravitationswirkung zeigt. Es gibt viele weitere Hinweise auf dunkle Materie, so dass die Astrophysiker bis heute rätseln, woraus sie besteht. Alle diese Überlegungen gehen allerdings davon aus, dass das Newtonsche Gesetz $F = GMm/r^2$ auch für interstellare und gar intergalaktische Distanzen (10^{22} - 10^{26} m!) gilt. Eigentlich ist das ein bißchen naiv, weil wir die Gültigkeit nur im Sonnensystem gut testen können (10^{13} m). Es wäre allerdings auch sensationell, wenn sich das Newtongesetz (und damit Einsteins ART) im kosmischen Maßstab als falsch herausstellen sollte.

Heller als tausend Sonnen- Nuklearenergie, leider nicht immer friedlich (050120)

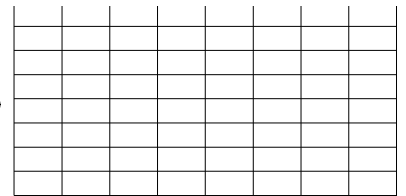
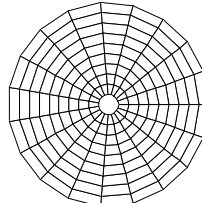
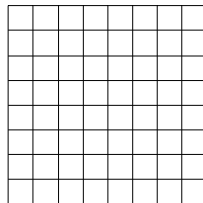
Nachdem 1938 endlich klar wurde (NP Otto Hahn 1945), dass viele Physiker schon den Urankern ^{235}U gespalten hatten (er zerfällt von selbst durch Anlagerung eines langsamen Neutrons), deutete sich eine ganz neuartige Art der Energiegewinnung an: bei der Spaltung werden 2-3 einzelne Neutronen frei, was zu einer Kettenreaktion führt, sobald die Uranmenge genügend groß ist (kritische Masse). Die Wirkung ist deshalb so verheerend, weil ein meßbarer und nennenswerter Anteil der Masse des Atomkerns sich nach der Einsteinschen Formel $E = mc^2$ in Energie umwandelt. Weil man u.a. befürchtete, Hitler könne zuerst eine derartige Bombe bauen, wurde in den USA 1943 ein Programm zum Bau gestartet (Manhattan Project). Einstein spielte dabei übrigens eine untergeordnete Rolle - er unterschrieb nur einen vorgefertigten Brief, der Präsident Roosevelt alarmieren sollte. Leider verloren die Physiker bald die Entscheidungsbefugnis, so dass die Bombe in Japan -wohl unnötigerweise- zum Einsatz kam.

Robert Jungk: Heller als tausend Sonnen. Werner Heisenberg: Der Teil und das Ganze

Wenn die Entfernungen nicht mehr stimmen - Was ist eine Metrik ? (050303)

In einem kartesischen Koordinatensystem (links) berechnet sich ein (infinitesimal) kleiner Abstand ds einfach mit Pythagoras: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Verwendet man dagegen Polarkoordinaten (mitte) mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so ergäbe sich $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, obwohl es sich (physikalisch) noch um die gleiche, ebene Fläche handelt. Entscheidend ist jedoch, dass man verzerrte und gekrümmte Flächen ebenfalls durch eine Metrik beschreiben kann, im einfachsten Fall das 'gedehnte' kartesische System (rechts): $ds^2 = 4dx^2 + dy^2$.

Die spezielle Relativitätstheorie läßt sich elegant beschreiben, indem man einen raumzeitlichen Abstand in vier Dimensionen definiert: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Räumliche Abstände sind dabei negativ, zeitliche positiv, und Licht bewegt sich genau mit der Bedingung $ds=0$!

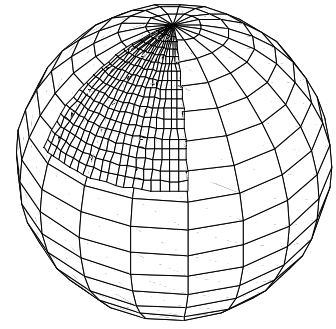


Kugelgeometrie - Kopfschmerzen für Euklid (050303)

Die Geometrie der Kugel hat bei näherem Hinsehen schon einige bemerkenswerte Eigenschaften, z.B. sind die kürzesten Wege nicht entlang der Breitenkreise (man betrachte die Flugroute von Berlin nach New York auf einem Globus), sondern auf den sog. Großkreisen mit dem Erdradius. Auch Dreiecke auf der Kugel haben immer eine größere Innenwinkelsumme

$\alpha + \beta + \gamma$ als 180° , wie aus dem Bild leicht erkennbar. Übrigens ist der Winkelerzeß $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ gerade proportional zur Fläche.

Dies gilt bei jedem Dreieck auf der Kugel! Die kürzesten Wege (Geodäten) in einer raumzeitlichen Geometrie spielen eine wichtige Rolle in der Relativitätstheorie: sie stellen die Teilchenbahnen dar!



Lichtablenkung: wofür Einstein 1919 gefeiert wurde (050303)

Schwerkraft wirkt auch auf Licht. Diese schon früher geäußerte Vermutung konnte Einstein 1915 als erster richtig berechnen. Für den Ablenkungswinkel gilt $\delta = \frac{4GM}{rc^2}$ (r Abstand von der Sonne). Er ist gerade doppelt so groß, als

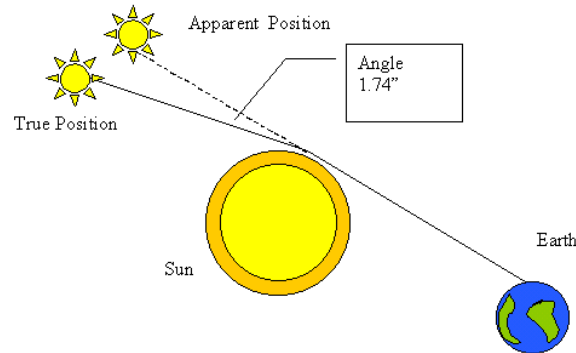
wenn man annehmen würde, ein Lichtteilchen werde durch die Newtonsche Schwerkraft $F = \frac{GM}{r^2}$ abgelenkt. Der

britische Physiker Eddington (man beachte: England und Deutschland befanden sich damals im Kriegszustand) bereitete eine Expedition zu einer Sonnenfinsternis vor, deren Daten die Einsteinsche Vorhersage bestätigten.

Mit dieser sensationellen Beobachtung wurde in einer berühmten Sitzung in London die neue Theorie als Ersatz für die Newtonsche anerkannt, obwohl jene natürlich näherungsweise gültig bleibt. Wie bei allen allgemeinrelativistischen Effekten taucht hier

die Größe $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, der sog

Schwarzschildradius auf.



A. Fölsing: *Einstein-Biographie*; Sexl/Urbantke: *Gravitation und Kosmologie*

Größe von Mars und Venus: Die Radarechoverzögerung, von der Einstein noch nichts wusste (050303)

In den 60er Jahren kam zum ersten Mal L. Schiff auf den Gedanken, dass nach der allgemeinen Relativitätstheorie Licht beim Vorbeiflug an der Sonne nicht nur abgelenkt wird, sondern auch eine Zeitverzögerung erfährt. Diese setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: zum einen vergeht im Gravitationsfeld die Zeit langsamer (um den Faktor ca. $1 - r_s/R$, s.o.), zum anderen wird der Raum wie bei einem eingebulbten Tischtuch gedehnt, so dass effektiv ein längerer Weg zurückgelegt werden muss. In den 60er Jahren konnte man dies zum ersten Mal messen, indem man ein Radarsignal zur Venus schickte und einen winzigen reflektierten Anteil detektieren konnte. Ging der Radarstrahl knapp an der Sonne vorbei, sah man die errechnete Verzögerung. Der gleiche Effekt, aber mit um ein Vielfaches größerer Genauigkeit wurde durch die Viking-Lander-Sonden gemessen, die auf dem Mars landeten und von dort Lichtsignale auf die Erde sendeten. Es handelt sich um einen der quantitativ besten Tests, die Theorie und Beobachtung stimmen mit weniger als 0,1% Abweichung überein. Einstein selbst hat so einen test nie vorgeschlagen, wohl weil er die technologische Entwicklung nicht ahnen konnte. Dieser sogenannte 4. Test seiner Theorie hätte ihn aber wohl tief befriedigt.

C. Will: *Hatte Einstein Recht?*

Schwarzschildmetrik- das schwarze Loch in der Raumzeit (050303)

Der Astronom Karl Schwarzschild wusste 1916 noch nichts davon, dass John Wheeler sehr viel später den Begriff "schwarzes Loch" prägen würde, als er eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen fand, die heute sehr oft benutzt wird. Einstein selbst hatte seine Vorhersagen auf mathematisch umständlicherem Wege hergeleitet. Die 'normale', 'flache', d.h. nichtgekrümmte Metrik des dreidimensionalen Raumes in Kugelkoordinaten ist nur wenig komplizierter als jene in Polarkoordinaten (s.o.): $ds^2 = dr^2 + r^2 (\sin \theta)^2 d\phi^2 + r^2 d\theta^2$, wobei $d\phi$ den Längen-, und $d\theta$ den im Breitengrad angibt. In der Umgebung einer Masse M ist die Raumzeit so verzerrt, als wenn man

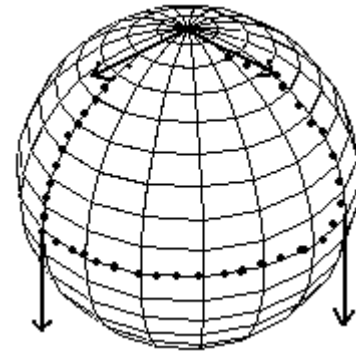
eine kleine Kugel mit dem Schwarzschildradius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ 'herausgeschnitten' hätte; dies darf dann bei der Längenmessung in Richtung des Radius nicht mehr mitgerechnet werden. Bei dr^2 taucht also ein Korrekturfaktor $(1-r_s/r)^{-1}$ auf. Da der Zeitablauf in einem Gravitationsfeld ebenfalls beeinflusst ist (vgl. 021024), erhält dt^2 den Korrekturfaktor $(1-r_s/r)$, so dass sich ergibt $ds^2 = (1-r_s/r)c^2 dt^2 = (1-r_s/r)^{-1} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta) d\phi^2 + r^2 d\theta^2$. Sieht schlimm aus, beschreibt aber nur mathematisch eine ähnliche Geometrie, als wenn man eine Nadel durch ein Stück Stoff gesteckt hätte (alle 'geradlinigen' Fäden werden beeinflusst). Sehr viel später hat man die ersten Objekte beobachtet, deren Masse sich auf den Radius zusammengezogen hatte - schwarze Löcher (vgl. 041118), aus denen kein Licht entweichen kann, und in denen die Zeit nicht mehr vergeht- verrückt!

Sexl/Urbantke: Gravitation und Kosmologie

Drehen eines Vektors beim Spaziergang - Was ist eine Konnexion ? (050303)

Mathematiker suchen ständig nach Möglichkeiten, gekrümmte Geometrien wie z.B. die einer Kugeloberfläche zu messen, *ohne* dass man sich aus ihr herausbegibt. Folgende Überlegung kann aber auch eine intelligente Ameise ausführen: Man gehe entlang eines geschlossenen Weges und versuche dabei, einen Regenschirm (Vektor) stets in der gleichen Richtung zu halten (sog. Paralleltransport). Führt der Weg vom Pol zum Äquator, entlang des Äquators

und wieder zurück, hat sich der Vektor gedreht, obwohl man ihn die ganze Zeit in der 'gleichen' Richtung gehalten hat! Das Symbol der Konnexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ bezeichnet z.B. die (unsichtbare, nur durch die Geometrie hervorgerufene) Drehung in der λ -Ebene (obere Indizes), wenn man sich in μ -Richtung bewegt hat. Als erste haben dies italienische Mathematiker wie Levi-Civita im 19. Jahrhundert entdeckt. Einstein benützte diesen Formalismus für seine allgemeine Relativitätstheorie. Es stellt sich heraus, dass die Konnexion sogar mit den Ableitungen der Metrik zusammenhängt..., aber davon später ☺...



Landau-Lifschitz II Kap.83 ff.

Riemannscher Krümmungstensor- physikalisch wiederentdeckt von Einstein (050303)

Auch dieses schrecklich kompliziert aussehende Symbol benötigte Einstein in seiner allgemeinen

Relativitätstheorie. Eine Zahlenmatrix wie $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (vgl.031113) kann man bekanntlich als a_{ik} abkürzen

(zeile i, Spalte k, z.B. $a_{21} = 3$). Eine Konnexion (s.o.) wäre demnach ein 'Würfel' aus Zahlen und der Krümmungstensor R_{ik}^{lm}

ein entsprechend vierdimensionales Objekt... Glücklicherweise gibt es ein paar Vereinfachungen, man kann ihn sich mit Hilfe der Vektordrehungen der Konnexion (s.o.) vorstellen: R_{xy}^{xz} bedeutet z.B. eine Drehung in der x - y -Ebene, wenn man gerade eine Fläche umrundet hat, die in der x - y -Ebene lag usw. Diese Zahlen hängen übrigens mit der Gaußschen Krümmung zusammen, deshalb war dieser wohl von seinem Schüler Riemann begeistert... Zählt man die Komponenten des Krümmungstensors in einem bestimmten System zusammen (Verjüngung), so erhält man die Massen- und Impulsdichte der Raumzeit. Diese Rückführung der Gravitation auf die Geometrie war der Triumph, der Einstein am meisten befriedigte.

Sexl/Urbantke: Gravitation und Kosmologie ; Landau-Lifschitz II Kap.83 ff.